Annexe 2

Logiques non classiques

A.2.1. L'Intuitionisme

La logique intuitioniste (Heyting 1930) s'attache davantage à la connaissance que l'on peut avoir de la vérité des énoncés, elle est en cela plus proche de la programmation informatique, dans la mesure où elle ne prend en compte que la constructibilité de preuves. Elle est née du rejet du principe du tiers-exclu et du raisonnement par l'absurde. Pour l'intuitionnisme, une preuve est un moyen effectif, par exemple une preuve de $A \rightarrow B$ est un algorithme de passage de toute preuve de A à une preuve de B (aspect constructiviste). A chaque dérivation intuitionniste, on peut associer un algorithme qui est un programme lié au λ-calcul (voir l'arithmétique fonctionnelle de J.L.Krivine).
Une axiomatique de l'intuitionnisme est réalisée par le système de Hilbert de l'annexe 1 dans lequel l'axiome $\neg\neg A \rightarrow A$ est remplacé par $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Sans l'axiome $\neg\neg A \rightarrow A$, le raisonnement par l'absurde consistant en $P \wedge \neg Q \rightarrow 0$ c'est à dire $\neg P \vee \neg\neg Q$ n'est pas équivalent à $\neg P \vee Q$ qui est $P \rightarrow Q$.
On prouve alors la formule $\neg(A \wedge \neg A)$ indiquant qu'il n'y a pas contradiction, mais pas le tiers-exclu $A \vee \neg A$ comme en logique classique. On montre cependant que le calcul propositionnel intuitionniste est décidable.
Par ailleurs il existe des sémantiques de Kripke ou topologique de Heyting assurant le théorème de complétude.

Un modèle de Kripke est K = (C, F) où C = $\{\alpha, \beta, \chi, ...\}$ est un ensemble pré-ordonné de «conditions» et F est un ensemble de couples (α, p) du produit cartésien C*Atomes vérifiant $(\alpha, A) \in F$ et $\alpha \leq \beta \Rightarrow (\beta, A) \in F$. On définit la relation «force» notée $\Vdash$ par les 6 clauses :

non $(\alpha \Vdash 0)$, si A est atomique $\alpha \Vdash A \Leftrightarrow (\alpha, A) \in F$

$\alpha \Vdash \neg A \quad \Leftrightarrow \forall \beta \geq \alpha$ non $(\beta \Vdash A)$

$\alpha \Vdash (A \wedge B) \quad \Leftrightarrow (\alpha \Vdash A)$ et $(\alpha \Vdash B)$

$\alpha \Vdash (A \vee B) \quad \Leftrightarrow (\alpha \Vdash A)$ ou $(\alpha \Vdash B)$

$\alpha \Vdash (A \rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \forall \beta \geq \alpha \ (\beta \Vdash A \Rightarrow \beta \Vdash B)$

On définit alors A valide dans K si et seulement si $\forall\alpha \ \ \alpha \Vdash A$ et on montre la consistance, à savoir que ($\alpha \Vdash A$ et $\alpha \Vdash \neg A$) est impossible, la monotonie :
($\alpha \Vdash A$ et $\alpha \leq \beta \Rightarrow \beta \Vdash B$) ainsi que la complétude :

A est valide dans tout modèle de Kripke
$\Leftrightarrow$ A démontrable intuitionistiquement.

Cette sémantique s'étend aux langages de prédicats intuitionistes.

A.2.2. La logique modale

Alors que l'intuitionnisme est plus faible que la logique classique, la logique modale la complète. Elle est fondée sur le fait que la définition de $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ vide la notion d'implication de sa signification causale s'il n'y a aucun lien entre A et B car il suffit en effet, en logique binaire classique, que A soit faux pour avoir $A \rightarrow B$ vrai.
On distingue alors deux connecteurs duaux le nécessaire $\Box$ et le possible $\Diamond$, liés par la relation $\Diamond P = \neg \Box \neg P$. $\Box A$ signifie que A est assuré comme vrai, et $\Diamond A$, qu'il est simplement possible c'est à dire compatible avec les connaissances actuelles.
Si ces deux connecteurs sont idempotents, et si on remplace chaque P par $\Box P$, alors tout théorème de logique intuitionniste est un théorème de logique modale.
Sémantiquement un modèle est un triplet M = (W mondes possibles, R relation binaire sur W, v une fonction valeur du produit W*Atomes sur {0,1}) et on définit :

$(M, w) \models A \quad \Leftrightarrow v(w, A) = 1$
$(M, w) \models \neg A \quad \Leftrightarrow$ non $(M, w) \models A$
$(M, w) \models A \wedge B \Leftrightarrow (M, w) \models A$ et $(M, w) \models B$
$(M, w) \models \Box A \quad \Leftrightarrow \forall w'$ si $(w R w')$ alors $(M, w') \models A$

On aura donc : $(M, w) \models \Diamond A \quad \Leftrightarrow \exists w' \ (w R w')$ et $(M, w') \models A$
Pour une sémantique dans un espace ordonné (le temps) voir [Gabbey 82].

Axiomatiquement, on prend l'axiomatique du calcul propositionnel plus l'axiome de distribution :
$\Box (A\rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ équivalent à $(\Box (A\rightarrow B) \wedge \Box A) \rightarrow \Box B$, la règle du modus-ponens et la règle de nécessité $A \vdash \Box A$ pour le système appelé K, d'autres axiomatiques plus complètes ont été imaginé, pour lesquelles existe un théorème de complétude :
Système KT : R est réflexive ce qui revient à indiquer en plus la «connaissance» par l'axiome $\Box A \rightarrow A$.
Système S4 : R est réflexive et transitive ce qui revient à l'axiome supplémentaire $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ (introspection positive, équivalente à $\Diamond\Diamond A \rightarrow \Diamond A$).
Système B : R est réflexive et symétrique, soit en plus : $A \rightarrow \Box \Diamond A$

Système S5 : R est une équivalence, c'est le système S4 plus l'axiome d'introspection négative $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$.

LA LOGIQUE AUTO-EPISTÉMIQUE

La logique autoépistémique [Moore 83, 88], est la logique classique, augmentée d'un seul connecteur modal $\Box$ dont l'interprétation sémantique est :

$\Box A$ est vrai $\Leftrightarrow A \in T$ (la théorie)

L'objectif est de formaliser les concepts de croyance et de justification. On montre, si th(S) désigne la théorie engendrée par les axiomes de S, dans le calcul des propositions, l'équivalence de stabilité :

$T = th(S \cup \{\Box A \,/\, A \in T\} \cup \{\neg\Box A \,/\, A \notin T\})$

T est dit «basé» ou «fondé» sur les axiomes S

$\Leftrightarrow$ Toute assignation satisfaisant les formules de S (un modèle de S) est aussi modèle de T

Une assignation v donne une valeur de {0, 1} à chaque variable propositionnelle et est étendue de façon classique en une interprétation des formules en rajoutant la définition autoépistémique $[v(\Box A) = 1] \Leftrightarrow A \in T$.

Puis on montre une «complétude» :

T est complète (contient toutes les formules vraies dans chaque modèle de T)

$\Leftrightarrow T = th(T)$ et $(A \in T \Rightarrow \Box A \in T)$ et $(A \notin T \Rightarrow \neg\Box A \in T)$

(T point fixe de th et stable).

EXEMPLES

Si $S_1 = \{p\}$ alors $T = th(\neg\Box p, \neg\Box\neg p, \Box\neg\Box p, ...)$ est une théorie autoépistémique complète basée sur {p}.

Soit maintenant, $S_2 = \{\Box p \rightarrow p\}$, il possède cette fois deux extensions stables $T_1 = th(p, \Box p, \neg\Box\neg p, ...)$ et $T_2 = th(\neg\Box p, \Box\neg\Box p, ...)$ dont l'union est inconsistante, (deux mondes parallèles).

$S_3 = \{\neg\Box p \rightarrow q, \neg\Box q \rightarrow p\}$ possède deux extensions stables $T_1 = th(p, \neg\Box q, \Box p, ...)$ et $T_2 = th(q, \neg\Box p, \Box q, ...)$ dont l'union est également inconsistante.

La sémantique est celle décrite plus haut, mais avec $(M, w) \models \Box A \Leftrightarrow \forall w\, (M, w) \models A$, ce qui revient à la structure S5 complète où la relation R est la relation d'équivalence triviale ($\forall w, w'$ on a $w\,R\,w'$).

A.2.3. La logique des défauts

Introduit par [Reiter 80], voir aussi [Froidevaux 85] et [Grégoire 90], ce point de vue veut gérer des connaissances typiques ou particulières, mais sans s'engager dans des problèmes d'ordre ou de nombre comme avec le flou, par exemple, "en général les routes sont assez larges pour que deux voitures se croisent», «en général, les oiseaux volent».
Il s'agit de donner un sens au raisonnement révisable. Plus précisémént, si S est un ensemble d'axiomes et th(S) la théorie qu'il engendre, la monotonie :
$S \subset T \Rightarrow th(S) \subset th(T)$ est remise en cause, ce qui signifie qu'ajouter un axiome n'élargit plus nécessairement la théorie engendrée. Par exemple [Besnard 89] si S = {ami (Alex, Luc), ami (Luc, Max)}, la règle ami(x, y) $\wedge$ ami(y, z) : ami(x, z) $\vdash$ ami(x, z) va prouver ami(Alex, Max), le fait de rajouter $\neg$ami(Alex, Max) dans S ne le permettra plus, bien que S reste consistante.
Les règles sont de la forme (A : défaut B) $\vdash$ C, signifiant que lorsque A est vrai et qu'on ne peut pas prouver $\neg$B alors on déduit C. On note $A \mid\!\sim C$ pour une déduction par défaut (A entraîne C tant que l'hypothèse B n'est pas contredite).
On a par exemple : $A \vdash B \Rightarrow A \mid\!\sim B$ $\qquad$ $(\vdash A \leftrightarrow B$ et $A \mid\!\sim C) \Rightarrow B \mid\!\sim C$
$[A \mid\!\sim B$ et $\vdash (B \rightarrow C)\,] \Rightarrow A \mid\!\sim C$ $\qquad$ $(A \mid\!\sim B$ et $A \mid\!\sim C) \Rightarrow A \mid\!\sim B \wedge C$
La théorie engendrée par un ensemble d'axiomes S et de règles R de ce type, se définit comme en logique classique, (une extension), c'est le plus petit ensemble de formules contenant S et stable par les règles. Un point fixe de l'opérateur th, qui peut encore être défini par induction comme : $E = \cup_{i \in N} E_i$ avec $E_0 = S$ et,
$E_{i+1} = E_i \cup \{C \,/\, (A : B_1, B_2, \ldots B_n \vdash C) \in R$ et $\forall i\ \neg B_i \notin E\}$

EXEMPLE 1
Pour les règles R = $\{1 : A \vdash C,\ C : B \vdash \neg D,\ 1 : D \vdash B\}$, si 1 désigne le vrai, on déduit $\{C, \neg D\}$ qui est l'unique extension.

EXEMPLE 2
$S = \varnothing$ et $R = \{1 : A \vdash B,\ 1 : \neg A \vdash C,\ B : D \vdash D,\ D : B \vdash A,\ C : \neg B \vdash \neg A\}$, possède deux extensions (deux mondes parallèles) {A, B, D} et $\{C, \neg A\}$

EXEMPLE 3
$S = \varnothing$ et $R = \{1 : \neg A \vdash \neg A,\ 1 : \neg B \vdash \neg B,\ 1 : A \vee B \vdash A \vee B\}$, possède les trois extensions $\{\neg A, \neg B\}$, $\{\neg A \vdash \neg A, A \vee B\}$ et $\{\neg B, A \vee B\}$.

EXEMPLE 4
S = {A} et $R = \{A : B \vdash C,\ A : D \vdash \neg C\}$, n'a pas extension.
Il est possible que l'union de deux extensions soit consistante, c'est le cas pour $S = \varnothing$ et $R = \{1 : \neg A \vdash B,\ 1 : \neg B \vdash A\}$ dont les deux extensions sont {A} et {B} pouvant cohabiter.

Un défaut est dit «normal» s'il est de la forme A : B ⊢ B.

En particulier «H est une hypothèse» peut s'écrire 1 : H ⊢H. Lorsque tous les défauts sont normaux, il y a au moins une extension, et toutes les extensions sont mutuellement incompatibles.

LA LOGIQUE DES PRÉDICATS NON MONOTONE DE MAC DERMOTT

C'est une logique [Mc Dermott 82] plus forte que le système S5 augmenté de l'axiome de Barcan $(\forall x\ \Box A) \rightarrow \Box(\forall x\ A)$ et de la règle d'inférence de généralisation $A \vdash \forall x\ A$, ainsi que d'une dernière règle dont l'expression non formalisée est «On ne peut inférer ¬A» ⊢ ◊A. Si S est un ensemble d'axiomes, à côté de Th(S) définie traditionnellement comme la théorie engendrée par S, on pose l'ensemble des hypothèses de S relativement à U c'est à dire consistantes avec U comme :

$$Hyp(S / U) = \{\Diamond p \ / \ p \text{ formule close et } \neg p \notin U\} - Th(S)$$

Ce que l'on note «Th~ théorie non monotone» engendrée par les axiomes de S est le plus petit point fixe U vérifiant $U = Th(S \cup Hyp(S / U))$. On pose alors $p \mid\!\sim q$ si et seulement si $q \in th\sim(p)$.

Cette règle permet d'admettre que A est possible jusqu'à ce que ¬A soit démontré, auquel cas ◊A et toutes ses conséquences doivent être retirées. Mac Dermott montre qu'il y a équivalence entre la théorie de S5 et cette théorie non monotone.

Exemples, pour $S = \{\Diamond p \rightarrow \neg q, \Diamond q \rightarrow \neg p\}$, $S \cup \{\neg p\}$ et $S \cup \{\neg q\}$ sont les deux plus petit points fixes.

Pour l'unique axiome $\Diamond p \rightarrow \neg p$, il ne peut y en avoir.

A.2.5. Les logiques temporelles

«Irma est veuve, Max a épousé Irma donc Max a épousé une veuve, mais alors Irma n'est plus veuve». C'est le genre de contradiction qui apparait lorsqu'on ne tient pas compte de l'évolution d'un système dans le temps. Des systèmes de prédiction ou de contrôle en temps réel (gestion des alarmes etc...) doivent pouvoir raisonner, outre dans l'incertain, dans le temps. Ces raisonnements sont donc non monotones, à savoir que des conclusions peuvent être remises en cause par de nouvelles informations arrivant dans le temps. Une proposition dans la logique temporelle, peut avoir différentes valeurs de vérité à des instants différents.

On introduit dans la logique des opérateurs temporels unaires F et P :
Fp : p sera vrai au moins une fois dans le futur
Pp : p a été vrai au moins une fois dans le passé.
Gp : p sera toujours vrai dans le futur (dorénavant), Gp est défini par ¬F¬p
Hp : p a toujours été vrai dans le passé (jusqu'à présent), Hp est défini par ¬P¬p

SÉMANTIQUE

Afin de formaliser les différentes logiques temporelles qui suivent, il est nécessaire, comme en logique modale, de considérer un graphe appelé «cadre temporel» (T, R)

pour représenter le temps, dans lequel R est une relation binaire (au minimum transitive pour le système L_0, mais pas obligatoirement un ordre total).
Si F est l'ensemble des formules, un modèle est (T ensemble d'instants, R relation binaire sur T, v fonction F*T vers {0,1}) et :

$v(Gp, t) = 1 \iff \forall u$ si (t R u) alors $v(p, u) = 1$
$v(Hp, t) = 1 \iff \forall u$ si (u R t) alors $v(p, u) = 1$
$v(Fp, t) = 1 \iff \exists u$ (t R u) et $v(p, u) = 1$
$v(Pp, t) = 1 \iff \exists u$ (u R t) et $v(p, u) = 1$
(ces deux dernières étant déduites de $v(\neg p, t) = 1 \iff v(p, t) = 0$)

et naturellement la sémantique des propositions classiques :

$v(\neg p, t) = 1 \iff v(p, t) = 0$
$v(p \wedge q, t) = 1 \iff v(p, t) = 1$ et $v(q, t) = 1$
$v(p \vee q, t) = 1 \iff v(p, t) = 1$ ou $v(q, t) = 1$

ASPECT SYNTAXIQUE

L_0 La plus simple axiomatique est alors le système L_0 contenant les axiomes de la logique classique avec les 4 axiomes supplémentaires :

$G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$ $\quad p \to GPp$
$H(p \to q) \to (Hp \to Hq)$ $\quad p \to HFp$

et la règle ordinaire du modus-ponens : si A et $A \to B$ sont prouvés, alors B l'est aussi, ainsi que la règle dite de généralisation temporelle : si p est un théorème, alors Gp et Hp le sont aussi.
Un certain nombre de théorèmes de complétude ont été prouvés, il s'agit des théorèmes montrant qu'une proposition est déduite par la syntaxe si et seulement si elle est vraie relativement à une sémantique.
Les différentes axiomatiques ci-dessous correspondent alors à une propriété particulière de la relation d'antériorité R.

L_1 (ordre) est L_0 augmenté de l'axiome $Gp \to GGp$ qui indique la transitivité. Remarquons que, par définition de G, cet axiome (ou plutôt ce schéma d'axiome valable pour toute proposition p) est équivalent à :
$(\neg F\neg p \to \neg F\neg\neg F\neg p) = (F\neg p \vee \neg FF\neg p) = (FF\neg p \to F\neg p)$ soit : $(FFp \to Fp)$.

L_{arb} (ordre arborescent) est L_1 augmenté de :
$Pp \wedge Pq \to P(p \wedge Pq) \vee P(p \wedge q) \vee P(Pp \wedge q)$ l'ordre est linéaire en arrière (une arborescence, donc déterministe pour le passé et ramifié pour le futur).

L_2 (ordre total) est L_0 augmenté de deux axiomes : $Fp \wedge Fq \to F(p \wedge Fq) \vee F(p \wedge q) \vee F(Fp \wedge q)$ (l'ordre est linéaire vers l'avant, donc dans le futur) et aussi linéaire en arrière (donc dans le passé) : $Pp \wedge Pq \to P(p \wedge Pq) \vee P(p \wedge q) \vee P(Pp \wedge q)$

L_3 (ordre total avec extrémités) est L_2 et 2 axiomes (0 et 1 désigne le faux et le vrai) : $G0 \vee FG0$ et $H0 \vee PH0$.

L_4 (ordre total sans extrémités) est L_2 plus 2 axiomes $Gp \to Fp$, $Hp \to Pp$, (l'ordre n'a pas d'extrémités)

L_5 (ordre total dense) est L_2 et $Fp \to FFp$

L_Q (ordre total dense dénombrable) est la réunion de L_4 et L_5 ($Fp \to FFp$ qui entraîne $Pp \to PPp$). L_Q est isomorphe à l'ensemble Q des rationnels, et un théorème du à Hamblin montre que toutes les combinaisons de «temps» avec les opérateurs G, H, F, P, se ramène à 15 temps reliés par des implications :

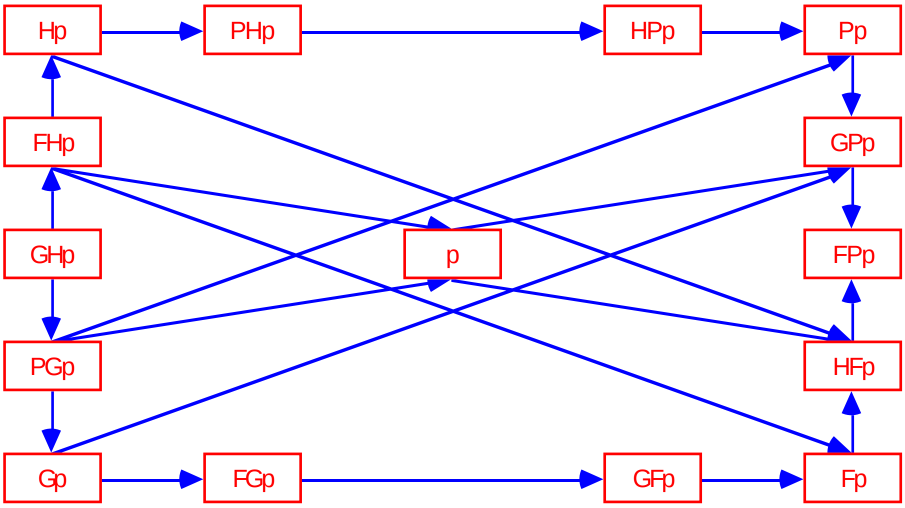

Figure A.2.1 Realations d'inférences entreles 15 temps dans L_Q.

L_6 (ordre total discret) est L_2 et 2 axiomes $p \wedge Hp \to FHp$, $p \wedge Gp \to PGp$
L_7 (ordre total complet c'est à dire sans coupure ouverte. Une coupure non ouverte, (fermée) est une partition de T en deux intervalles I et J telle qu'il existe s avec s = max(I) ou bien s = min(J). R est complet, Q ne l'est pas en prenant par exemple I = $\{x / x^2 < 2\}$ et J = $\{x / x^2 > 2\}$)
L_7 est L_2 augmenté de l'axiome :
$Fp \wedge FG\neg p \to F(HFp \wedge G\neg p)$, et $Pp \wedge PH\neg p \to P(HPp \wedge H\neg p)$
L_R est L_Q avec $Fp \wedge FG\neg p \to F(HFp \wedge G\neg p)$ et aussi :
$Pp \wedge PH\neg p \to P(GPp \wedge H\neg p)$ isomorphe à l'ensemble des réels R.
L_8 (bon ordre : toute partie de T possède un plus petit élément), c'est L_2 avec :
$H(Hp \to p) \to Hp$
L_9 (treillis, temps ramifié où chaque couple a un majorant commun et un min) L_2 augmenté de $Gp \to Fp$, $Hp \to Pp$, $FGp \to GFp$ et $PHp \to HPp$.

REMARQUE À PROPOS D'UNE REPRÉSENTATION DES INTERVALLES DANS LE TRAITEMENT DU TEMPS

Les relations d'Allen [Allen 81] sur les intervalles de temps sont :

$I < J \Leftrightarrow \forall u \in I\ \forall u \in J\quad u < v$, I précède J

$I\ m\ J \Leftrightarrow \max(I) = \min(J)$, I touche J

I o J $\Leftrightarrow$ min(I) < min(J) et min(J) < max(I) < max(J), I chevauche J

I d J $\Leftrightarrow$ I $\subset$ J , I est dans J

I s J $\Leftrightarrow$ min(I) = min(J) et max(I) < max(J), I débute J

I e J $\Leftrightarrow$ min(I) > min(J) et max(I) = max(J), I termine J

Le système d'Allen est un ensemble d'intervalles muni des 13 relations formées par l'égalité, les 6 relations (antiréflexives) ci-dessus et leurs relations réciproques. Si I = [x, y] est un intervalle, on peut représenter I par le point (x, y) du demi-plan supérieur à la diagonale x = y (qui représente d'ailleurs les intervalles réduits à un point), en ce cas les images de I par ces 13 relations sont figurées par les 6 zones ouvertes, les 6 portions de droites et le point I lui-même.

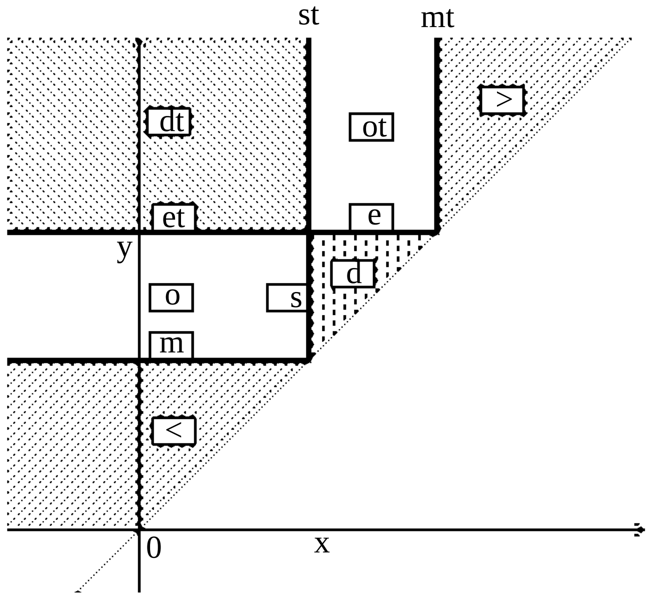

Figure A.2.2 Sur ce dessin du à [Bestougeff, Ligozat 89] la partie marquée «d» par exemple, est l'ensemble d(I) des intervalles J tels que J d I c'est à dire des intervalles J inclus dans I. La demi-droite marquée mt est l'ensemble des J = [x', y'] tels que I m J, c'est à dire «prolongeant» I avec x' = y.

LA LOGIQUE CAUSALE DE SHAFER [Shafer 96]

Il s'agit d'une construction axiomatique d'un système de logique temporelle et probabiliste faisant appel aux relations intuitives de «peut précéder», «peut suivre», «peut diverger», «fusionne» ...

Le but est de définir une structure «espace d'évènements» sur des éléments appelés «situations», par plusieurs relations d'ordres :

x $\succ$ y (x se raffine en y, signifiant concrètement que y est une situation particulière de l'évènement x). Cet ordre doit être tel que toute partie A possède une borne inférieure appelée fusion de A, c'est la situation la plus grossière résumant toutes celles de A.

x ➟ y (x permet y) relation devant vérifier x ➟ y et z ➢ y ⇒ x ➟ z

x ➼ y (x requis pour y, ou y requiert x) devant vérifier x ➼ y et z ➢ x ⇒ z ➼ y

x < y (x précède y) ⇔ x ➟ y et x ➼ y (x permet y et y requiert x)

x ↔ y (x et y se chevauchent) x et y ont un raffinement commun (en d'autres termes sont «confluents» pour la relation «être raffiné par» ➢, c'est le cas de T et U ci-dessous dont Y est un raffinement).

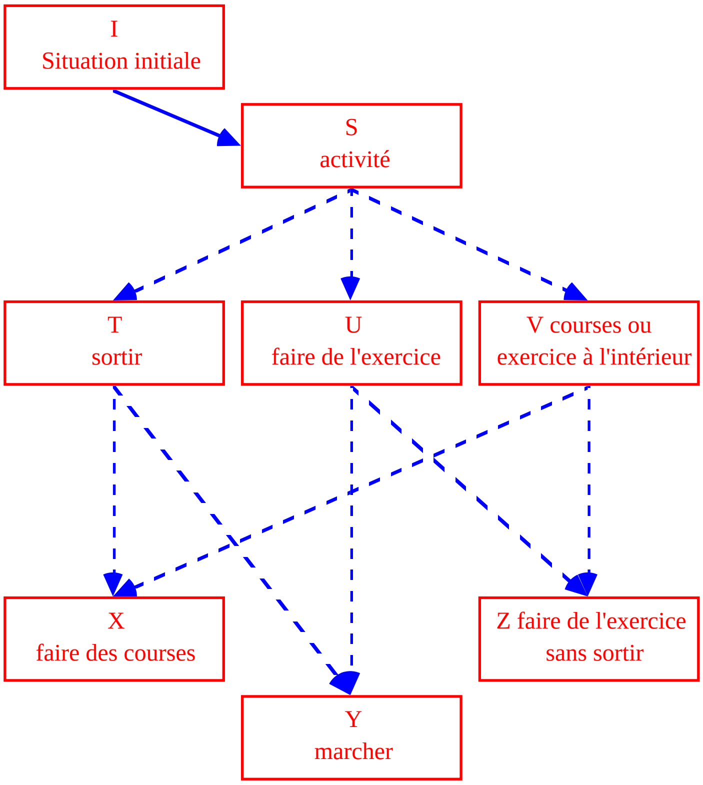

Figure A2.3 Exemple de raffinement de situations, en pointillé, la relation «se raffine en», en trait plein «précède». On imagine la complexité d'un tel arbre en augmentant le détail (raffinement des situations).

La complexité de cette structure réside dans le fait qu'on ne peut représenter ces situations dans un arbre (pour la relation <) ni même dans un arbre où chaque nœud serait une composante connexe vis à vis de la relation ➢. C'est pourquoi la définition formelle est donnée grâce à 5 relations de base dont R_1 qui est exactement ↔, et une axiomatique comportant notamment :

Axiome 1 (pour toutes situations, on a toujours au moins l'une des 5 relations satisfaite : x R_1 y ou x R_2 y ou x R_3 y ou x R_4 y ou x R_5 y, nommées respectivement «chevauche», «peut requérir», «peut appeler», «peut entraîner» et «peut diverger».

Axiome 5, à savoir : si x R_i y pour l'une quelconque de ces 5 relations, alors il existe toujours un raffinement x' de x lié à y par R_i mais non lié à y par aucune des 4 autres.

On pose alors les définitions :

x R_2 y (x peut requérir y) ⇔ y R_3 x ou y R_4 x

x ➼ y (x requis pour y) ⇔ x R_2y, mais unique relation vérifiée parmi les 5.

x ➢ y (x se raffine en y) ⇔ ¬(y R_2 x) et ¬(y R_3 x) et ¬(y R_4 x) ¬(y R_5 x)

x ➟ y (x permet y) ⇔ ¬(x R_1 y) et ¬(x R_2 y) et ¬(y R_5 x)

x < y (x précède y) ⇔ ¬(x R_2 y) et ¬(x R_5 y) et ¬(y R_3 x) ¬(y R_4 x) et ¬(y R_5 x)

x → y (x implique y, avant ou après) ⇔ ¬(x R_4 y) et ¬(x R_5 y)

x ➞ y (x oblige ou appelle y)

⇔ x ➟ y et x ➼ y et ¬(x R_4 y)

⇔ x R_3 y, mais unique relation parmi les 5

x ↕ y (x et y divergent, ne peuvent avoir lieu en même temps)

⇔ x R_5 y, mais vérifie cette unique relation parmi les 5.

Une «clade» sera une partie formée d'éléments deux à deux divergents.

On montre alors qu'étant donnés x et x' distincts avec x' raffinant x, il existe toujours une situation notée x \ x' raffinant x et réalisant la fusion de tous les raffinements de x qui divergent de x'. On dit que x' et x \ x' décomposent x.